ПОСТРОЕНИЕ АОЕ-ЦЕПИ В ПЛОСКОМ ГРАФЕ

Т.А. Макаровских[1], **Е.А. Савицкий**[2]

Южно-Уральский государственный университет, пр. Ленина, д. 76, 454080 Челябинск, Россия
[1]kwark@mail.ru, [2]egor88@inbox.ru

Пусть $G = (V, E)$ – граф, а $T = v_0, k_1, v_1, \dots, k_n, v_n,\ v_n = v_0$ – эйлеров цикл в нем. Предположим, что в каждой вершине $v \in V$ задан циклический порядок $O^{\pm}(v)$, определяющий систему переходов $A_G(v) \subset O^{\pm}(v)$ в этой вершине. В случае, когда $\forall v \in V(G)\ A_G(v) = O^{\pm}(v)$, систему переходов $A_G(v)$ будем называть **полной системой переходов**.

Определение 1. *Маршрут T удем называть **A-цепью** тогда и только тогда, когда он является A_G-совместимой цепью. Таким образом, последовательные ребра в цепи T (инцидентные вершине v) являются соседями в циклическом порядке $O^{\pm}(v)$.*

Определение 2. *Будем говорить, что **цепь** $C = v_1e_1v_2e_2 \dots v_k$ в графе G имеет **упорядоченное охватывание** (является OE-цепью), если для любой ее начальной части $C_i = v_1e_1v_2e_2 \dots e_i$, $l \le (|E(G)| + |H(G)|)$ выполнено условие*

$$\mathrm{Int}(C_i) \cap (E(G) \cup H(G)) = \emptyset.$$

Определение 3. *Будем говорить, что цепь является AOE-цепью, если она одновременно является OE-цепью и A-цепью.*

Данный вид цепей подробно описан в монографии Г. Фляйшнера [1]. В общем случае задача поиска такой цепи в графе относится к классу $\mathcal{NP}$-трудных задач, однако для некоторых частных случаев существуют эффективные алгоритмы ее решения. В работах данного автора приводятся также полиномиальный алгоритм для внешнеплоских графов [2] и для 4-регулярных графов [1] (т.е. графов, степень каждой вершины которых равна 4). В [1, Следствие VI.6] приводится доказательство существования A-цепи для любого связного 4-регулярного графа на любой поверхности. Для доказательства данного факта автор использует Лемму о расщеплении [1, Лемма III.26]. Также доказано, что существует полиномиальный алгоритм для распознавания A-цепи в 4-регулярном графе.

В общем случае наличие в графе A-цепи вовсе не означает выполнение для нее условия упорядоченного охватывания. Однако, маршрут, для которого не выполнено условие упорядоченного охватывания, всегда будет содержать переход через охватывающий цикл. Этот переход несовместим с системой переходов A-цепи. Таким образом справедлива теорема [3].

Теорема 1. *Если в плоском графе G графе существует A-цепь, то существует и AOE-цепь.*

Очевидно, что т.к. для всех $v \in V(G)$, имеем $\deg(v) = 4$, то 4-регулярный граф является эйлеровым. Рассмотрим следствие из теоремы 1.

Следствие 1. *В связном плоском 4-регулярном графе существует AOE-цепь.*

В [3] приведен алгоритм `AOE-TRAIL` построения AOE-цепи.

Теорема 2. *Вычислительная сложность алгоритма `AOE-TRAIL` является линейной величиной $O(|E|)$.*

Рассмотрим произвольный плоский граф G. В [4] показано, что в G всегда существует эйлерово OE-покрытие. Если G является плоским эйлеровым графом, то в нем существует OE-цикл. Плоский эйлеров граф имеет OE-цикл (цепь), однако он может и не являться AOE-цепью.

Определение 4. *Эйлеровым AOE-покрытием называется минимальная по мощности упорядоченная последовательность A-цепей, являющихся OE-покрытием. Если убрать требование минимальность, то покрытие будем называть AOE-покрытием* [3].

Следовательно, OE-цепь можно считать последовательностью нескольких A-цепей. Но если граф является суграфом некоторого 4-регулярного графа, всегда возможно построить эйлерово AOE-покрытие. Рассмотренный выше алгоритм для 4-регулярного графа позволит построить такое покрытие после дополнения графа G до 4-регулярного графа G' добавлением N ребер, где $2N$ – число вершин нечетной степени графа G [5].

Разработана программа [6], которая обеспечивает определение AOE-цепи в плоском 4-регулярном графе. Программа является реализацией представленного алгоритма и может быть использована для демонстрации разработанных алгоритмов поиска решения указанной задачи. Каждое ребро графа представляется списком инцидентных ему вершин и левых и правых соседних ребер, инцдентных каждой из вершин и значением ранга каждого ребра.

Для представления графа в памяти компьютера используются следующие классы:

```
struct GraphEdge{
   int v1,v2; //Инцидентные вершины
   int l1,l2; //Соседние ребра при вращении против часовой стрелки
   int r1,r2; //Соседние ребра при вращении по часовой стрелке
   bool f0; //Флаг смежности ребра внешней грани
   int rank; //ранг ребра
   void REPLACE(); //Перестановка индексов ребра
   GraphEdge(){ //Конструктор по умолчанию
      };
};

class Graph{
public:
   GraphEdge *E; //Набор ребер графа
   int EdgeNum; //Число ребер графа
   Graph(int N){ //Конструктор графа из N ребер
      EdgeNum=N+1;
      E=new GraphEdge[N+1];
   };
   Graph(){}; //Конструктор по умолчанию
   void WriteData(int *ATrail); //Запись ответа
   int *FindATrail(int v0); //Поиск A-цепи
   int Deg(int vertex);//Определение степени вершины
};
```

Литература

1. Фляйшнер, Г. *Эйлеровы графы и смежные вопросы.* М.: Мир, 2002.

2. Andersen L. D., Fleischner H., Regner S. *Algorithms and outerplanar conditions for A-trails in plane Eulerian graphs* // Discrete Applied Mathematics. 1998. No. 85. P. 99–112.

3. Макаровских Т. А. *Покрытие графа для прямоугольного раскройного плана AOE-цепями* // Информационные технологии и системы: тр. Четвертой междунар. науч. конф., Банное, Россия, 25 февр. – 1 марта 2015 г. (ИТиС–2015) : науч. электр. изд. / отв. ред.: Ю. С. Попков, А. В. Мельников. Челябинск : Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2015. С. 17–18.

4. Панюкова Т. А. *Оптимальные эйлеровы покрытия с упорядоченным охватыванием для плоских графов.* Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Том 18, № 2. С. 64–74.

5. Макаровских Т. А. *О построении эйлерова AOE-покрытия в плоском графе* // Информационный бюллютень №13, XV Всероссийская конф. «Математическое программирование и приложения». 2015. С. 96–97.

6. Макаровских Т. А. *Программа построения A-цепи с упорядоченным охватыванием в плоском 4-регулярном в графе* // Программы для ЭВМ. Базы данных. Топологии интегральных микросхем. – Официальный бюллетень Российского агентства по патентам и товарным знакам. 2015 г. М.: ФИПС. – 2015. – Рег. № 2014663188.